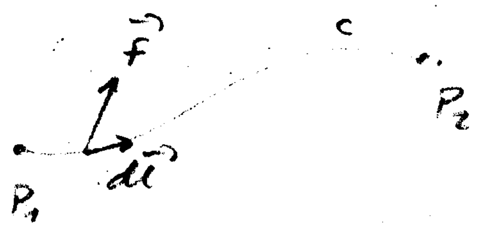
# Potencial Eletrostático

Forças conservativas: trabalho realizado independe da trajetória; depende apenas dos pts $P_1$ e $P_2$.




$$W_{P_1 \to P_2} = \int_{P_1,\,C}^{P_2} \vec F \cdot d\vec l$$

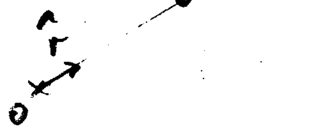
Nesses casos é útil definir energia potencial associada à força $\vec F$. Na verdade, definimos a variação de energia potencial

$$\Delta U = U(P_2) - U(P_1) = -\int \vec F \cdot d\vec l = -W_{P_1 \to P_2}$$

A energia potencial, propriamente dita, é definida a menos de uma cte arbitrária (origem de energia) que é especificada, por exemplo, arbitrando que $U(P_a) = 0$ em algum ponto $P_a$.

- Forças centrais, cujo módulo só depende da distância ao centro de forças, são conservativas

$$\vec F = F(r)\,\hat r$$



O nome força conservativa é uma referência ao fato de que, se a resultante das forças que atuam em um sistema for conservativa, a energia mecânica $E_M = E_c + U$ se conserva.

Teorema energia trabalho estabelece que

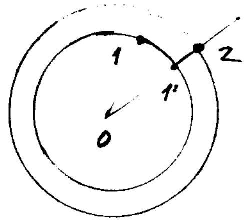
$W_R = \Delta E_c$

trabalho feito pela resultante das forças que atuam em um sistema é igual a variação da energia cinética $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ do sistema.

Se $\vec{R}$ é conservativa $\Rightarrow$ $W_R = -\Delta U$ $\Rightarrow$

$\Delta E_c = -\Delta U \Rightarrow E_c^f + U^f = E_c^i + U^i \Rightarrow$

$$\boxed{E_c + U = \underline{cte}} \qquad E_M = E_c + U = \underline{cte}$$




$W_{P_1-P_2} = W_{P_1,-P_2}$ pois

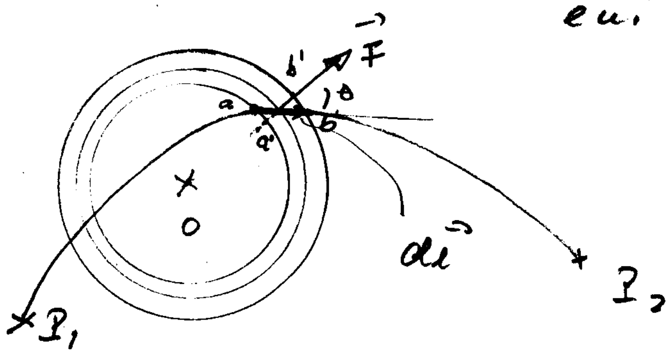
$W_{1-1'} = 0$ $\vec{F}$ é $\perp$ $d\vec{l}$ no trecho 1-1'.

$\vec{F} = f(r)\,\hat{r}$

$$W_{1'-2} = \int_{1'}^{2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{1'}^{2} f(r)\,dr = G(R_2) - G(R_{1'})$$

onde $f(r) = \dfrac{dG}{dr}$

Qualquer que seja a trajetória, podemos repartí-la em trechos infinitesimais




$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = \underbrace{f\,dl\cos\theta}_{\text{componente de } d\vec{l} \text{ na direção de } \hat{r}} = f\,dr$$

Trecho $a \to b$ aproximado por $aa' + a'b' + b'b$

De $a \to a'$ $W = 0$ de $b' - b$ $W = 0$ pois $\vec{F} \perp d\vec{l}$;

só sobra de $a' - b'$ onde $W_{a'-b'} = \int f\,dr$ que só depende de $R_{a'} = R_a$ e $R_{b'} = R_b$.

Neste caso, o trabalho só depende dos raios $R_{P_1}$ e $R_{P_2}$

(*) Nota: Este é o caso da força Coulombiana.

Força Coulombiana é conservativa $\Rightarrow$

podemos definir uma energia potencial associada a ela

$$\Delta U = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Obs: Se a resultante das forças atuando sobre uma partícula é conservativa $\Rightarrow W = \Delta E_c \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta U \Rightarrow \Delta E_c + \Delta U = 0$ ; $E = E_c + U \rightarrow$ energia mecânica se conserva.

Associado à força Coulombiana definimos o campo elétrico $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_0}$ , tal que $\vec{F} = q_0 \vec{E}$.

- Definimos potencial elétrico de forma análoga

$$\Delta V = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\boxed{\Delta U = q_0 \Delta V}$$

(−) Trabalho feito pelo campo eletrostático.

Evidentemente, o trabalho feito pelo campo independe da trajetória ligando $P_1$ a $P_2$; só depende de $P_1$ e $P_2$.

Se ele independe da trajetória e só depende das posições $P_1$ e $P_2$ $\Rightarrow$ em qualquer trajetória fechada (sai e volta a $P_1$) $\Delta V = \Delta U = 0$.

Na verdade essa é uma condição necessária e suficiente para que uma força (ou campo) seja conservativa (o): sua circulação ($\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ ou $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$) ao longo de qualquer caminho fechado deve ser nula.

---

Unidades $\vec{F}\cdot d\vec{\ell}$ tem dimensão de N.m no SI

$1J = 1Nm$

$\vec{E}$ tem unidade de $\frac{N}{C}$ no SI $\Rightarrow$

Potencial eletrostático Coulombiano V tem dimensão de $\frac{J}{C}$ = Volt

$$\boxed{1V = 1\,J/C}$$

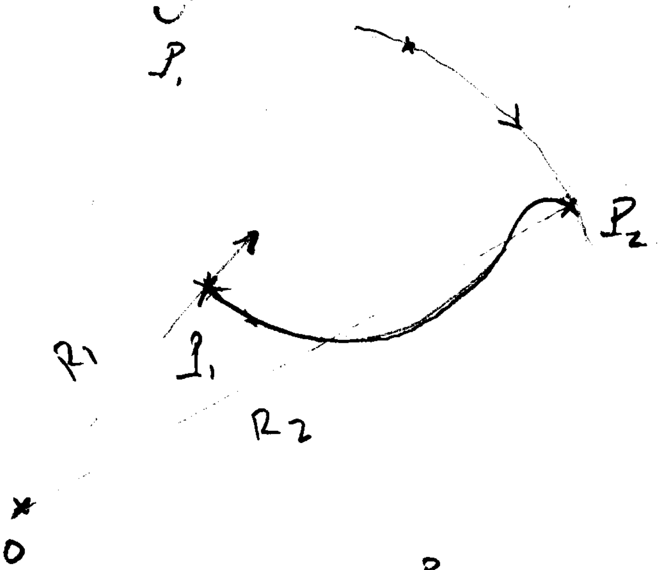
(*) Note que E tb. pode ser dado em $\frac{V}{m}$

$dV = -E d\ell$

Potencial devido a uma carga pontual.

$$\Delta V = V(P_2) - V(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\,\hat{r}$$



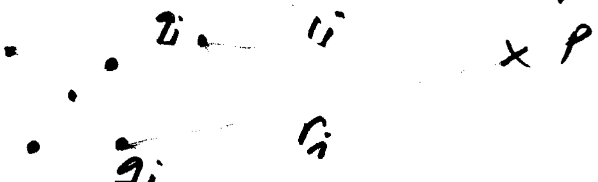

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = E\,dr \Rightarrow V(P_2)-V(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} E\,dr = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{kq}{r^2}\,dr$$

$$= -kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{R_1}^{R_2} = kq\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

Escolhendo a origem do potencial $V(\infty)=0$

$$\boxed{V(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}}$$

Princípio da superposição: potencial devido a uma distribuição de cargas




$$\boxed{V(P) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_i}}$$

Usando o princípio de superposição,

Observe que o cálculo do potencial é, em geral, mais fácil que o cálculo do campo elétrico. O cálculo do potencial envolve uma soma de escalares enquanto que o cálculo do campo envolve uma soma vetorial

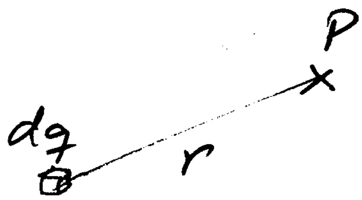
$$\begin{cases} V(P) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum\limits_i \dfrac{q_i}{r_i} \\[2ex] \vec{E}(P) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum\limits_i \dfrac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \end{cases}$$

—— // ——

Para distribuições contínuas de carga.

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

soma sobre todos os elementos de carga que compõem a distribuição




r representa a distância entre o elemento de carga dq da distribuição e o ponto P onde o potencial está calculado.

Dado o campo elétrico em todo o espaço, é possível calcular o potencial elétrico em todo o espaço. A recíproca tb é verdadeira: se conhecemos o potencial em todo o espaço podemos obter o campo em todo o espaço. Podemos trabalhar com o campo ou com o potencial; o que for mais conveniente.

É possível mostrar que $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$

gradiente de V

$$\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}.$$

veja notas suplementares.

---